HIMPUNAN RESOLVING DARI BLOK LINGKARAN DARI GRAF KAKTUS

HAZRUL ISWADI

Departemen MIPA Universitas Surabaya
Gedung TG Lantai 6
Jalan Raya Kalirungkut Surabaya 60293
hazrul_iswadi@staff.ubaya.ac.id

Extended Abstract

Misalkan $G = (V(G),E(G))$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan garis $E(G)$. Misalkan $W = \{w_1, w_2, \cdots ; w_k\} \subseteq V(G)$ adalah himpunan titik terurut. k-tuple $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \cdots, d(v,w_k))$ didefinisikan sebagai *representasi dari v terhadap W*. Himpunan W disebut *himpunan resolving* dari G jika setiap titik mempunyai representasi yang berbeda terhadap W. Himpunan resolving G yang memuat jumlah titik minimal disebut *himpunan resolving minimum* atau *basis* dari G. *Dimensi metrik* dari graf G, dinotasikan dengan $\dim(G)$, adalah jumlah titik dalam basis G. Titik v di basis B dari G disebut dengan *titik basis* dari G.

Konsep tentang *himpunan pembeda minimum* pada graf diperkenalkan secara terpisah oleh Slater [12], dan Harary dan Melter [4], dengan menggunakan peristilahan yang berbeda. Slater menggunakan istilah himpunan acuan untuk himpunan pembeda minimum, sedangkan Harary dan Melter menggunakan istilah basis. Konsep dimensi metrik mempunyai beberapa aplikasi antara lain untuk menyelesaikan persoalan pemadaman api oleh Hulme dkk. [5] dan Hulme dkk. [6], klasifikasi database graf kimia yang berukuran besar oleh Johnson [8] dan Johnson [9], dan navigasi robotik seperti yang dijelaskan oleh Khuller dkk. [10].

Pada makalah ini, kami merintis usaha untuk menentukan dimensi metric dari graf kaktus. *Graf kaktus G* didefinisikan sebagai graf dengan sifat setiap blok yang memiliki tiga buah titik atau lebih adalah sebuah blok lingkaran. Graf kaktus yang

kami definisikan di atas adalah graf yang memiliki struktur lebih umum dari kelas graf yang terdapat di Iswadi dkk. [7] dan Maryono dkk. [11]. Karena upaya menentukan dimensi metric graf kaktus G sangat sulit maka pada makalah ini kami membatasi permasalahan pada penentuan sifat-sifat himpunan resolving dari blok lingkaran dari graf kaktus.

Dalam makalah ini, graf yang akan dibahas adalah graf tak berarah, berhingga, sederhana, dan terhubung. Untuk notasi dan definisi dasar dari graf dapat dilihat di Chartrand and Lesniak [2].

Chartrand dkk. [1] juga memperoleh dimensi metric graf lingkaran (C_n) yaitu 2. Beberapa peneliti meneliti dimensi metric dari graf yang berkaitan dengan lingkaran seperti Iswadi dkk. [7] dan Maryono dkk. [11]. Iswadi dkk. [7] telah menentukan dimensi metric dari graf amalgamasi lingkaran yaitu graf yang bersifat setiap blok adalah blok lingkaran dan memiliki satu dan hanya satu titik potong. Maryono dkk. [11] telah menentukan dimensi metric dari graf kaktus C_n^m yaitu graf yang bersifat setiap blok adalah blok lingkaran, setiap lingkaran dalam seluruh titiknya adalah titik potong, sedangkan setiap lingkaran luar memiliki satu dan hanya satu titik potong.

Graf G disebut sebagai *graf berdimensi-k* jika $\dim(G) = k$ (Chartrand dan Zhang [3]). Misalkan G adalah graf berdimensi-k dengan $k \geq 1$. Graf G adalah *graf berdimensi-k secara acak* jika setiap k buah titik secara acak di graf G maka himpunan yang dibentuk oleh k buah titik tersebut membentuk sebuah basis di G. Chartrand dan Zhang [3] telah membuktikan bahwa graf lengkap K_{k+1} adalah graf berdimensi-k secara acak untuk setiap $k \geq 1$ dan graf lingkaran C_n dengan n bilangan ganjil ≥ 3 adalah graf berdimensi-2 secara acak.

Pada makalah ini sifat-sifat himpunan resolving dari graf kaktus dibuktikan dengan metode deduksi dan menggunakan hasil-hasil terdahulu seperti $\dim(C_n) = 2$ dan graf lingkaran C_n dengan n bilangan bulat ganjil ≥ 3 adalah graf berdimensi-2 secara acak.

Sebuah titik v dari graf G disebut *titik potong* G jika titik v dihapus dari G mengakibatkan jumlah komponen dari G - v atau $k(G - v)$ akan lebih besar dari komponen dari G atau $k(G)$. Sebuah blok dari suatu graf adalah subgraf maksimal tanpa titik potong. Sebuah blok yang berbentuk lingkaran disebut dengan *blok lingkaran*. Jika pada suatu blok lingkaran C dari graf G terdapat hanya dua buah titik potong u dan v sedemikian sehingga terdapat dua lintasan dengan panjang sama yang menghubungkan u dan v maka pasangan titik u dan v disebut *pasangan antipodal*.

Dengan menggunakan konsep pasangan antipodal sifat graf berdimensi-2 secara acak dari graf lingkaran C_n dengan n bilangan ganjil ≥ 3 dapat diperluas untuk semua graf lingkaran C_n kecuali graf lingkaran genap dengan titik-titik basis dalam posisi sebagai pasangan antipodal.

Lema berikut ini dapat digunakan untuk memprediksi batas bawah dari dimensi metric dari graf kaktus G.

Lema 1 Misalkan W adalah himpunan resolving dari graf kaktus G. Misalkan C adalah blok lingkaran di G dan hanya memuat satu titik potong v. Setiap C memuat sekurang-kurangnya satu titik dari W yang bukan titik potong di C.

Sebuah blok lingkaran C di graf kaktus G dikatakan *blok ujung lingkaran* jika C memiliki titik potong tunggal. Dengan menggunakan Lema 1 di atas, secara mudah dapat disimpulkan akibat berikut ini.

Akibat 1 Untuk graf kaktus G berlaku

$$\dim(G) \geq n,$$

dengan n adalah banyaknya blok ujung lingkaran dari graf kaktus G.

Teorema 1 Misalkan W adalah himpunan resolving dari graf kaktus G. Misalkan C adalah blok lingkaran di G yang memuat lebih dari satu titik potong, dan tidak memiliki pasangan antipodal. Setiap dua titik di C dapat dibedakan oleh himpunan $W \cap (G - C)$.

Teorema 2 berikut ini melengkapi Teorema 1 dalam hal keberadaan pasangan antipodal dalam blok lingkaran *C* di graf kaktus *G*.

Teorema 2 Misalkan *W* adalah himpunan resolving dari graf kaktus *G*. Misalkan *C* adalah blok lingkaran di *G* yang memuat pasangan antipodal. Setiap *C* memuat sekurang-kurangnya satu titik dari *W* yang bukan titik potong di *C*.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G., Eroh, L., Johnson, M.A., dan Oellermann, O.R., Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.*, 105, 99 – 113, 2000.
[2] Chartrand, G., dan Lesniak, L., Graphs and Digraphs, 3rd ed., *Chapman and Hall/CRC*, 2000.
[3] Chartrand, G. dan Zhang, P., The Theory and Appllications of Resolvability in Graphs: A Survey, *Congr. Numer.* 160, 47 – 68, 2003.
[4] Harary, F. dan Melter, R., On the Metric Dimension of a Graph, *Ars Combin.* 2, 191 – 195, 1976.
[5] Hulme, B., Shiver, A. dan Slater, P., Fire: A Subroutine for Fire Protection Network Analysis, *Sandia National Laboratories, New Mexico* SAND 81–1261, 1981.
[6] Hulme, B., Shiver, A. dan Slater, P., Computing Minimum Cost Fire Protection, *Sandia National Laboratories, New Mexico* SAND 82–0809, 1982.
[7] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., dan Salman, A.N.M., Metric Dimension of Amalgamation of Cycles, *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 41:1, 19 – 31, 2010.
[8] Johnson, M., Structure-Activity Maps for Visualizing the Graph Variables Arising in Drug Design, *J. Biopharm. Statist.* 3, 203 – 236, 1993.
[9] Johnson, M., Browsable Structure-Activity Datasets, *Advances in molecular similarity (R. Carbo-Dorca and P. Mezey, eds.)* 153 – 170, 1998.
[10] Khuller, S., Raghavachari, B. dan Rosenfeld, A., Localization in Graphs, *Technical Report* . 1994.

[11] Maryono, I., Salman, A.M.N., dan Iswadi, H., Dimensi metrik dari graf kaktus C^n_m, *Proceeding of Mathematics and Mathematics Education National Seminar in Surabaya State Univesity, Indonesia, June 20,* 2009.
[12] Slater, P., Leaves of Trees, *Congr. Numer.* 14, 549 – 559, 1975.