

GRAF SPLIT $K_{2n/n}$ TIDAK SISI-AJAIB UNTUK $n \equiv 3 \pmod{8}$ DAN TIDAK SISI-AJAIB SECARA KUAT UNTUK SETIAP $n > 3$

HAZRUL ISWADI

Departemen Matematika dan IPA (MIPA)
Universitas Surabaya (UBAYA)
Jalan Raya Kalirungkut Surabaya 60292
e-mail: us6179@wolf.ubaya.ac.id

Abstrak.

Pelabelan total sisi-ajaib pada suatu graf G adalah pemetaan satu-satu $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$, dimana $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$, dengan sifat untuk setiap sisi xy di G , $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, untuk suatu konstanta k . Bilangan k disebut bilangan ajaib G . Suatu graf G dengan sebuah pelabelan total sisi-ajaib disebut sisi-ajaib. Pelabelan total sisi-ajaib disebut kuat jika label dari titik adalah label paling kecil yang mungkin yaitu $1, 2, \dots, v$. Graf G disebut sisi-ajaib secara kuat jika mempunyai suatu pelabelan total sisi-ajaib kuat. Graf split $K_{2n/n}$ adalah graf yang memiliki jumlah titik $v = 2n$, n buah titik membentuk graf lengkap K_n dan n buah titik yang lain masing-masingnya terhubung ke semua titik di graf lengkap K_n . Pada tulisan ini dibuktikan bahwa graf split $K_{2n/n}$ tidak sisi-ajaib untuk $n \equiv 3 \pmod{8}$ dan tidak sisi-ajaib secara kuat untuk setiap $n > 3$.

Kata kunci: graf split, pelabelan total sisi-ajaib

1. Pendahuluan

Graf G adalah himpunan berhingga tak kosong dari titik $V(G)$ bersama dengan himpunan pasangan tak berurut dari dua titik yang berbeda di G yang dinamakan dengan sisi dan dinotasikan dengan $E(G)$. Kardinalitas dari himpunan titik $|V(G)|$ di G dinotasikan dengan v dan disebut dengan *orde* G , sedangkan *kardinalitas* dari himpunan sisi $|E(G)|$ dinotasikan dengan e dan disebut dengan *ukuran* G . Sisi $xy = \{x, y\}$ disebut *menghubungkan* titik x dan y . Jika xy suatu sisi di G maka x dan y disebut sebagai titik-titik yang *bertetangga*. *Derajat* $d(x)$ dari suatu titik x di G adalah himpunan dari semua titik lain y di G sehingga y adalah tetangga x di G .

Beberapa definisi berikut diambil dari Chartrand dan Lesniak (1996). *Graf lengkap* K_n dengan n buah titik adalah graf dengan setiap dua titik selalu bertetangga. *Komplemen* \bar{G} dari graf G adalah graf dengan himpunan titik yang sama dengan G sehingga dua titik bertetangga di \bar{G} jika dan hanya jika titik-titik tersebut tidak bertetangga di G . *Graf Null* \bar{K}_n adalah komplemen dari graf lengkap K_n . *Graf bipartit* $K_{m,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan mempartisi himpunan $V(G)$ menjadi himpunan V_1 dan V_2 sehingga setiap sisi di $E(G)$ menghubungkan titik di V_1 dengan V_2 .

Dari Wallis (2001) diperoleh definisi-definisi berikut. *Pelabelan total sisi-ajaib* pada suatu graf G adalah pemetaan satu-satu $\lambda : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, v + e\}$, dimana $v = |V(G)|$ dan $e = |E(G)|$, dengan sifat diberikan sisi xy di G , $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, untuk suatu konstanta k . Bilangan k disebut *bilangan ajaib* G . Suatu graf G dengan sebuah pelabelan total sisi-ajaib disebut *sisi-ajaib*. Pelabelan total sisi-ajaib disebut *kuat* jika label dari titik adalah label paling kecil yang mungkin yaitu $1, 2, \dots, v$. Sebuah graf disebut *sisi-ajaib secara kuat* jika mempunyai suatu pelabelan total sisi-ajaib kuat.

Misalkan λ pelabelan total sisi-ajaib graf G dengan jumlah ajaib k , dengan himpunan label untuk titik-titik di G adalah $\{a_1, a_2, \dots, a_v\}$. Kondisi perlu yang harus dipenuhi adalah:

1. $a_i + a_j + a_h = k$ tidak mungkin terjadi jika ada dua a_i, a_j , dan a_h bertetangga di G .
2. jumlah $a_i + a_j$, dimana $x_i x_j$ sisi di G , semuanya berbeda.
3. $0 < k - (a_i + a_j) \leq v + e$, dimana $x_i x_j$ sisi di G .

Didefinisikan jumlahan bilangan bulat sebagai berikut

$$\sigma_i^j = (i+1) + (i+2) + \dots + j = i(j-i) + \binom{j-i+1}{2} \quad (1)$$

Dengan menggunakan persamaan (1), jumlah dari bilangan k dikali dengan banyaknya sisi e adalah

$$ke = \sigma_0^{v+e} + \sum [d(x_i) - 1] a_i. \quad (2)$$

Dari persamaan (2) dapat dibuktikan teorema penting berikut ini.

Teorema 1 (Ringel dan Llado (1996))

Jika G mempunyai jumlah garis e genap, setiap titik x di G memiliki derajat $d(x)$ ganjil, dan jumlahan $v + e \equiv 2 \pmod{4}$ maka graf G tidak memiliki pelabelan total sisi-ajaib

Kotzig dan Rosa (1970) (seperti yang tertera dalam Gallian (2001)) telah membuktikan bahwa graf bipartit $K_{m,n}$ mempunyai pelabelan total sisi-ajaib untuk setiap m dan n . Kemudian dari Wallis (2001) disebutkan bahwa graf lengkap K_n mempunyai pelabelan total sisi-ajaib jika dan hanya jika $n = 1, 2, 3, 5$, atau 6 . Pertanyaan tentang pelabelan total sisi-ajaib suatu graf G kemudian ditunjukkan pada graf-graf G yang memuat graf lengkap K_n seperti graf split $K_{m+n/n}$ dibawah ini.

Graf split $K_{m+n/n}$ merupakan suatu graf yang memuat graf lengkap K_n , graf Null \bar{K}_m , dan graf bipartit $K_{m,n}$ yang menghubungkan dua himpunan titik di graf lengkap dengan graf Null. Jumlah titik $K_{m+n/n}$ adalah $v = m + n$, jumlah sisi $e = mn + \binom{n}{2} = \frac{n}{2}(2m+n-1)$, dan $v + e = m + n + mn + \binom{n}{2} = \frac{1}{2}(2m+n)(n+1)$. Untuk $m = n$, Graf split $K_{2n/n}$ memiliki jumlah titik $v = 2n$, jumlah sisi $e = n^2 + \binom{n}{2} = \frac{n}{2}(3n-1)$, dan $v + e = 2n + n^2 + \binom{n}{2} = \frac{3n}{2}(n+1)$.

Dalam hasil dibawah ini akan ditunjukkan bahwa graf split $K_{2n/n}$ tidak sisi-ajaib untuk $n \equiv 3 \pmod{8}$ dan tidak sisi-ajaib secara kuat untuk setiap $n > 3$.

2. Hasil-hasil

Teorema 1 tidak dapat dipakai pada graf split $K_{2n/n}$ dengan n genap karena pada graf split $K_{2n/n}$ dengan n genap akan diperoleh setiap titik x pada bagian graf Null \bar{K}_n mempunyai derajat $d(x)$ genap. Teorema 1 juga tidak dapat dipakai pada graf split $K_{2n/n}$ dengan $n \equiv 1 \pmod{8}$, $n \equiv 5 \pmod{8}$, dan $n \equiv 7 \pmod{8}$. Untuk graf split $K_{2n/n}$ dengan $n \equiv 1 \pmod{8}$ dan $n \equiv 5 \pmod{8}$ maka jumlah sisi $e = \frac{n}{2}(3n-1)$ akan bernilai ganjil. Kemudian untuk $n \equiv 7 \pmod{8}$ maka jumlah $v + e \equiv 0 \pmod{4}$. Sedangkan untuk $n \equiv 3 \pmod{8}$ diperoleh teorema 2 di bawah ini.

Teorema 2

Graf split $K_{2n/n}$ tidak mempunyai pelabelan total sisi-ajaib jika $n \equiv 3 \pmod{8}$

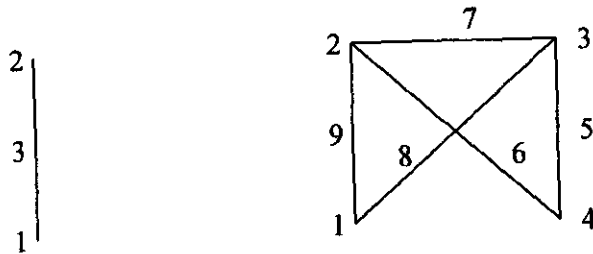
Jawab: Misalkan suatu graf split $K_{2n/n}$ dengan $n \equiv 3 \pmod{8}$. Maka diperoleh $v \equiv 6 \pmod{8}$ dan $e \equiv \frac{1}{2}[3 \pmod{8}][3(3 \pmod{8}) - 1]$. Karena $3 \pmod{8}$ merupakan bilangan ganjil maka diperoleh e bernilai genap. Sedangkan derajat dari setiap titik x di $K_{2n/n}$ adalah

$$d(x) = \begin{cases} 2n-1, & \text{jika } x \text{ titik di graf lengkap } K_n \\ n, & \text{jika } x \text{ titik di graf Null } \bar{K}_n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{dengan } n \text{ ganjil. Kemudian } v + e &\equiv \frac{3}{2}[3 \pmod{8}][3 \pmod{8} + 1] \\ &\equiv \frac{3}{2}[3 \pmod{8}][4 \pmod{8}] \\ &\equiv [1 \pmod{8}][2 \pmod{4}] \\ &\equiv 2 \pmod{4} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema 1, graf split $K_{2n/n}$ dengan $n \equiv 3 \pmod{8}$ tidak mempunyai pelabelan total sisi-ajaib. \square

Berikut ini akan diperlihatkan pelabelan total sisi-ajaib kuat untuk $n = 1$ dan 2. Untuk $n = 1$, diperoleh graf split dengan $v = 2$ dan $e = 1$. Jadi terdapat pelabelan total sisi-ajaib kuat dengan titik diberi label 1 dan 2 dan sisi diberi label 3 sehingga $k = 6$. Sedangkan untuk $n = 2$, diperoleh graf split dengan $v = 2$ dan $e = 5$. Pelabelan total sisi-ajaib kuat dapat dibuat dengan memberi label titik-titik dengan 1, 2, 3, 4, label sisi-sisi dengan 4, 5, ..., 9, dan bilangan ajaib $k = 12$, seperti yang terlihat pada gambar 1 di bawah ini.



a. graf split $K_{2n/n}$, dengan $n = 1$

b. graf split $K_{2n/n}$, dengan $n = 2$

Gambar 1 Pelabelan total sisi-ajaib kuat untuk graf split $K_{2n/n}$, dengan $n = 1$ dan 2

Dari teorema 2 di atas diketahui bahwa graf split $K_{2n/n}$, dengan $n = 3$ tidak sisi-ajaib. Berikut ini pada teorema 3 akan ditunjukkan bahwa graf split $K_{2n/n}$, dengan $n > 3$ tidak sisi-ajaib secara kuat.

Misalkan graf split $K_{2n/n}$, dengan $n > 3$, mempunyai himpunan n buah titik $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ yang berasal dari bagian graf lengkap K_n dan himpunan n buah titik $\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}\}$ yang berasal dari bagian graf Null \bar{K}_n . Misalkan λ pelabelan total sisi-ajaib secara kuat dari $K_{2n/n}$ dan berlaku untuk setiap sisi $x_r x_s$ di $K_{2n/n}$

$$\lambda(x_r) + \lambda(x_r x_s) + \lambda(x_s) = k,$$

dimana k suatu bilangan bulat positif dan $\lambda(x_r) = a_r$, dimana a_r dan $r \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan juga $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ dan $a_{n+1} < a_{n+2} < \dots < a_{2n}$.

Teorema 3

Graf split $K_{2n/n}$ tidak mempunyai pelabelan total sisi-ajaib kuat untuk $n > 3$

Jawab: Misalkan $a_k, a_l \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dengan $a_k < a_l$ dan $a_i, a_j \in \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}\}$ dengan $a_i < a_j$. Andaikan $a_j = a_i + 1$ maka haruslah $a_l \geq a_k + 2$. Karena kalau $a_l = a_k + 1$ maka

$$a_i + a_j = a_k + 1 + a_i = a_k + a_j.$$

Padahal $x_i x_j$ dan $x_k x_j$ sisi-sisi di $K_{2n/n}$. Bertentangan dengan λ pelabelan total sisi-ajaib dari $K_{2n/n}$. Untuk $a_l > a_k + 2$ maka sekurang-kurangnya $a_l = a_k + 3$. Kemudian akan diperoleh

$$a_n = a_{n-1} + 3 = a_{n-2} + 6 = \dots = a_1 + 3(n-1) = a_1 + n - 3 + 2n > a_1 + 2n.$$

Sehingga diperoleh $a_n > 2n$. Bertentangan dengan λ pelabelan total sisi-ajaib secara kuat. Sedangkan untuk $a_i = a_k + 2$ maka himpunan $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ berupa himpunan dengan n buah bilangan genap atau ganjil saja. Padahal a_i dan a_j adalah dua bilangan yang berurutan di himpunan $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}\}$ sehingga tidak terdapat n buah bilangan ganjil atau genap saja pada himpunan $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Kemudian andaikan $a_j \geq a_i + 2$. Untuk $a_j > a_i + 2$, dengan cara yang sama dengan diatas akan diperoleh $a_{2n} > 2n$. Bertentangan lagi dengan λ pelabelan total sisi-ajaib secara kuat. Jadi satu-satunya kemungkinan yang tertinggal adalah $a_j = a_i + 2$. Andaikan $a_j = a_i + 2$ maka himpunan $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}\}$ berupa himpunan dengan n buah bilangan genap atau ganjil saja. Jika himpunan $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}\}$ adalah himpunan n buah bilangan genap maka himpunan $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ adalah himpunan n buah bilangan ganjil. Sehingga $a_1 = 1$, $a_n = 2n - 1$, $a_{n+1} = 2$, dan $a_{2n} = 2n$. Kemudian diperoleh

$$\lambda(x_n x_{n+1}) = k - (a_n + a_{n+1}) = k - (2n + 1) = k - (a_1 + a_{2n}) = \lambda(x_1 x_{2n}).$$

Padahal $x_n x_{n+1}$ dan $x_1 x_{2n}$ sisi-sisi di $K_{2n/n}$. Berarti bertentangan dengan λ pelabelan total sisi-ajaib. Dengan cara yang sama untuk himpunan $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{2n}\}$ adalah himpunan n buah bilangan ganjil akan diperoleh juga

$$\lambda(x_n x_{n+1}) = k - (a_n + a_{n+1}) = k - (2n + 1) = k - (a_1 + a_{2n}) = \lambda(x_1 x_{2n}).$$

Sehingga diperoleh lagi kontradiksi dengan λ pelabelan total sisi-ajaib. Jadi tidak terdapat pelabelan total sisi-ajaib secara kuat dari graf split $K_{2n/n}$, untuk $n > 3$. \square

Daftar Pustaka

- G. Chartrand dan L. Lesniak (1996), *Graphs and Digraphs*, edisi ke-3, Chapman&Hall, London
- J. A. Gallian (2001), *A dynamic survey of graph labeling*, Electronic Journal Combinatorics, Dynamic Survey #DS6
- G. Ringel dan A. S. Llado (1996), *Another tree conjecture*, Bulletin Inst. Cominatorics Application 18, hal. 83-85
- W. D. Wallis (2001), *Magic graphs*, Birkhauser, Basel